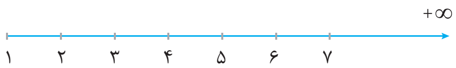
فصل ۱ مقدمات ریاضی، معادلات، نامعادلات و توابع

پیش‌نیاز اول
مجموعه‌های اعداد و دستگاه مختصات و خط (فصل اول دهم و یازدهم)

بخش اول مجموعه‌های اعداد

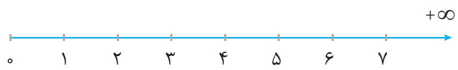
۱) شمارش ساده تو طبیعت و مجموعه اعداد طبیعی.

[1] $N = \{۱, ۲, ۳, ۴, ...\}$

محور اعداد طبیعی


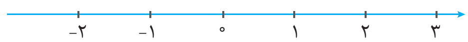
۲) صفر اضافه می‌شه و مجموعه اعداد حسابی به دنیا میاد.

[2] $W = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ...\}$

محور اعداد حسابی


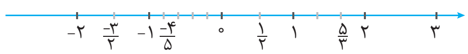
۳) قرینه مثبت‌ها هم به دنیا میان یعنی اعداد منفی که با هم می‌شن صحیح

[3] $Z = \{..., -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ...\}$

محور اعداد صحیح


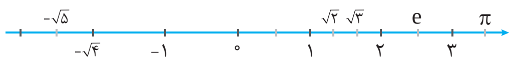
۴) اعداد کسری یا گویا بین اعداد صحیح رو پر می‌کنن.

[4] $Q = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq ۰\}$

چند کسر گویا به عنوان مثال


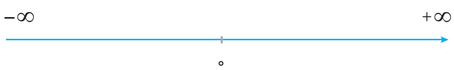
۵) هنوز جای اعداد گنگ خالیه.

$Q' \xrightarrow{\text{مثل}} \sqrt{۲}, \sqrt{۳}, \pi, e, ...$

محور اعداد گنگ


۶) گویا و گنگ با همدیگر محور رو پر می‌کنن و میشه اعداد حقیقی.

$R = Q \cup Q'$

محور اعداد حقیقی یا محور xها


دیگه اگه آب بریزین رو این محور از هیچ جاییش چکه نمی‌کنه و نشتی نداره. پُره‌پُره!
روی این محور می‌تونیم بازه‌ها رو نشون بدیم. پس بپردازیم به انواع بازه.

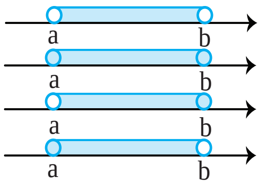
بخش دوم انواع بازه

جواب‌های یک معادله برحسب درجه‌ی اون چند تا عدده ولی جواب‌های یک نامعادله معمولاً یک بازه است یعنی مجموعه‌ای از اعداد. پس لازمه قبل از شروع روش‌های حل نامعادله، توضیحاتی در مورد انواع بازه خدمت عزیزان تقدیم کنم. این بازه (a, b) یک بازه‌ی بازه. یعنی خود a و b در مجموعه‌حضور ندارن (البته با اجازه‌ی شما)، اما این بازه $[a, b]$ یک بازه‌ی بسته است. یعنی چون خود a و b هست باید بازه رو بست! در این حالت خود a و b در بازه حضور دارن. بازه‌های $[a, b)$ و $(a, b]$ نیمه بازن.

---

[1] - Natural numbers
[2] - Whole numbers
[3] Zahlen numbers
[4] Quotient numbers

با هم این بازه‌ها را روی محور اعداد حقیقی می‌بینیم تا اگر احیاناً مشکلی هست برطرف بشه:



۱) (a,b) $\{x \mid x\in\mathbb{R}, a<x<b\}$

۲) $[a,b]$ $\{x \mid x\in\mathbb{R}, a\le x\le b\}$

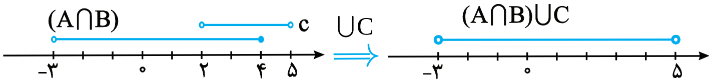
۳) $(a,b]$ $\{x \mid x\in\mathbb{R}, a<x\le b\}$

۴) $[a,b)$ $\{x \mid x\in\mathbb{R}, a\le x<b\}$

اگه **اجتماع** $(\bigcup)$ دو بازه خواسته شد، جواب باید هر دو تا رو پوشش بده و اگه **اشتراک** $(\bigcap)$ خواسته شد فقط جاهایی که تو هر دو بازه هستن قبوله!

مثال ۱ **اگر** $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x\le ۴\}$ **و** $B=\{x\in\mathbb{R} \mid x>-۳\}$ **و** $C=\{x\in\mathbb{R} \mid ۲<x<۵\}$ **باشند، حاصل** $(A\bigcap B)\bigcup C$ **به دست آورید؟**

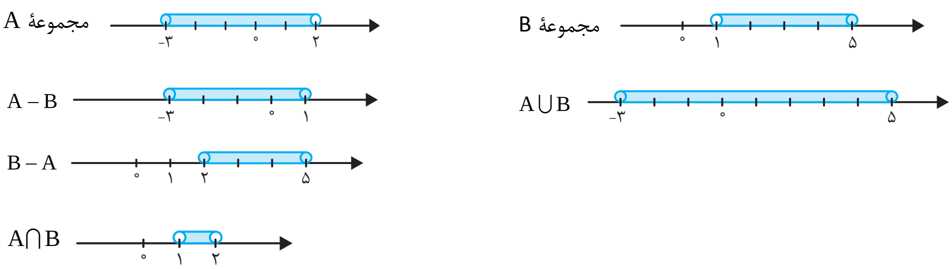
پاسخ: تو این سؤال‌ها که باید چند بازه با هم درنظر گرفته بشه، بهترین روش، رسم اونها روی محوره:



$(A\bigcap B)=(-۳,۴] \quad \xRightarrow{\bigcup C} \quad (A\bigcap B)\bigcup C=(-۳,۵)$

مثال ۲ **اگر** $A=[-۳,۲)$ **و** $B=(۱,۵]$ **باشد بازه‌های A و B را روی محور نشان دهید و حاصل عبارت‌های** $A-B$**،** $B-A$**،** $A\bigcup B$ **و** $A\bigcap B$ **را تعین کنید.**

پاسخ:



$A\bigcup B=[-۳,۵]$ $\qquad$ $A\bigcap B=(۱,۲)$

$A-B=[-۳,۱]$ $\qquad$ $B-A=[۲,۵]$

بازه‌هایی که تو دو تا مثال قبلی مورد بررسی قرار دادیم بازه‌های متناهی هستن، نوع دیگر از بازه‌ها هستن که به صورت نامتناهی است. یعنی یک طرف $+\infty$ یا $-\infty$ هست. اینگونه بازه‌ها برای نشان دادن اعداد بیشتر از a یا کمتر از a مورد استفاده قرار می‌گیره. در زیر چند نمونه از این بازه‌ها رو با هم بررسی می‌کنیم.

۵) $(a,+\infty)=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x>a\}$ $\qquad$ ۶) $[a,+\infty)=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\ge a\}$

۷) $(-\infty,a)=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x<a\}$ $\qquad$ ۸) $(-\infty,a]=\{x \mid x\in\mathbb{R}, x\le a\}$

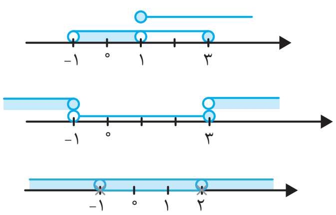
تذکر بازه $(-\infty,+\infty)$ روی محور اعداد نشان دهنده مجموعه اعداد حقیقی است.

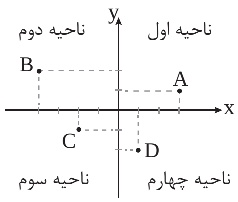
مثال ۳ **حاصل عبارت‌های زیر را به کمک محور مختصات به صورت بازه نشان دهید.**

الف) $(-۱,۳]-[۱,+\infty)=(-۱,۱)$

ب) $\mathbb{R}-(-۱,۳]=(-\infty,-۱]\bigcup(۳,+\infty)$

ج) $\mathbb{R}-\{-۱,۲\}=(-\infty,-۱)\bigcup(-۱,۲)\bigcup(۲,+\infty)$





این محور اعداد حقیقی یا همون محور xها همونطور که دیدین برای نشون دادن بازه‌هاست و فقط یک بعد یعنی x رو نشون می‌ده. اگر یک کپی از محور x ها برداریم و تو صفر بهش عمود کنیم میشه محور yها و حالا دیگه صفحه رو به چهار ناحیه تقسیم کردیم. هر نقطه از این دستگاه که اسمش دستگاه مختصات دکارتی یا کارتزینه به صورت (x,y) نمایش داده میشه. مثلاً ۴ نقطه $A(۳,۱)$ و $B(-۴,۲)$ و $C(-۲,-۱)$ و $D(۱,-۲)$ رو تو دستگاه روبه‌رو نشون می‌دیم:

اگه دو نقطه رو تو این دستگاه به هم وصل کنیم خط تشکیل می‌شه که معادلش به صورت $y = ax + b$ نوشته می‌شه. پس بپردازیم به خط راست و معادلش. سال‌ها تجربه تدریس تو کلاس‌های مختلف به من ثابت کرد اولین چیزی که دانش‌آموز تو درس ریاضی باید یاد بگیره اینه!

بخش سوم معادله خط

اولین قسمت از ریاضی پایه رو با یادآوری و تکمیل معادله خط آغاز شروع می‌کنیم.
البته من براساس سرفصل‌های کتاب درسی حرکت می‌کنم ولی سعی کردم خط به خط کتاب رو قشنگ‌تر و بهتر به شما دانش‌آموزان عزیز معرفی کنم و یاد بدم:

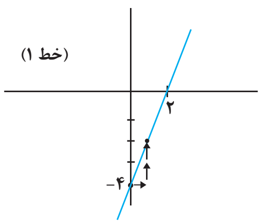
$$y = \underbrace{a}_{\text{شیب}}\, x + \underbrace{b}_{\text{عرض از مبدأ}}$$

همونطور که بالا نوشتم b عرض از مبدأ یعنی فاصله عرضی تا مبدأ مختصاته و a شیب خط. شیب خط یعنی همون تغییرات عرضی نسبت به تغییرات طولی ولی اگه تغییرات طولی یعنی Δx رو یک در نظر بگیریم شیب میشه همون Δy. پس داریم:

$$\text{شیب خط} = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\text{if } \Delta x = ۱} m = \Delta y$$

در کتب قدیمی و نسخه‌های خطی!!! به شیب خط، ضریب زاویه هم می‌گفتند.

پس اگر شیب خطی یک باشه یعنی به ازای $\Delta x = ۱$ یعنی یک واحد که به سمت راست محور xها (همون جلوی خودمون!) حرکت کنیم خط هم یک واحد بالا میاد. شیب ۲ یعنی به ازای هر یک واحد که جلو بریم خط دو واحد بالا میاد. شیب (-۲) یعنی هر یک واحد که جلو بریم خط ۲ واحد پایین میاد. حالا بیاین به صورت عملی خط‌کشی کنیم!



مثلاً می‌خوایم اولین مثال یعنی خط $y = ۲x - ۴$ رو بکشیم.

گام اول: می‌شینیم تو عرض از مبدأ یعنی نقطه $(۰,-۴)$

گام دوم: $m = ۲$، پس به ازای یک واحد که جلو بریم خط دو واحد بالا میاد.

تذکر مهم ۱ محل برخورد خط با محور xها مهم‌ترین نقطه‌ی اون خطه که بهش می‌گن ریشه!

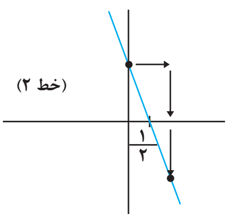
این نقطه از طریق حل معادله $y = ۰$ بدست میاد. مثلاً در اینجا:

$$y = ۰ \Rightarrow ۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow x = \frac{۴}{۲} = ۲$$

تذکر مهم ۲ خطوطی که شیب مثبت دارند اکیداً صعودی و خطوطی که شیب منفی دارند اکیداً نزولی هستند.

تذکر مهم ۳ هر ریشه‌ای که از طریق عامل درجه اول تولید بشه یک ریشه ساده است و ویژگی اصلیش اینه که قبل و بعد از ریشه تغییر علامت داریم. علامت هم یعنی همون علامت y؛ که خروجی تابع است. مثلاً تو خطی که الان کشیدیم و اکیداً صعودیه قبل از $x = ۲$ علامت منفی و بعد از $x = ۲$ علامت مثبته چون خط بعد از ۲ بالای محور xهاست.

حالا بریم یه خط با شیب منفی بکشیم. مثلاً خط $y = -۲x + ۱$



گام اول: تو نقطه $(۰,۱)$ می‌شینیم (عرض از مبدأ).

گام دوم: اینجا $m = -۲$، پس به ازای یک واحد که از نقطه $(۰,۱)$ به سمت جلو حرکت کنیم خط ۲ واحد پایین میاد.

اینجا بعد از حل معادله‌ی $-۲x + ۱ = ۰$ می‌رسیم به $x = \frac{۱}{۲}$ که ریشه‌ی معادلست؛

قبل از $\frac{۱}{۲}$ علامت مثبت و بعد از $\frac{۱}{۲}$ علامت منفیه چون این خط اکیداً نزولیه و بعد از ریشه، افتاده زیر محور xها!

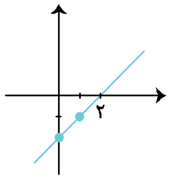
پس طریقه‌ی خط‌کشی! ابتدا روی محور عرض‌ها در عرض از مبدا می‌نشینیم! و سپس یک واحد به سمت جلو یعنی xهای مثبت حرکت می‌کنیم. اگر شیب $+a$ بود، a واحد به بالا و اگر $-a$ بود، a واحد به سمت پایین می‌ریم.

تذکر مهم ۴ این خطاها همیشه ریشه ساده تولید می‌کنن. دو نوع ریشه مهم دیگه هم داریم که خوبه از الان بلد باشین. مثلاً وقتی $(x-۱)^۲=۰$ رو حل کنیم $x=۱$ میشه ریشه مضاعف و بعد از حل معادله $(x-۱)^۳=۰$ به $x=۱$ می‌رسیم که بهش می‌گیم مکرر فرد. که البته تو بخش تعیین علامت مفصل در موردش صحبت می‌کنیم.

حالا چند تا مثال خوب هم با هم ببینیم:

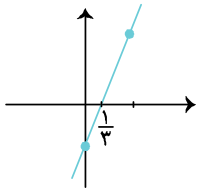
$y=x-۲$

(خط ۳)



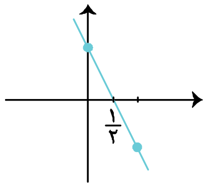
$y=۳x-۱$

(خط ۴)



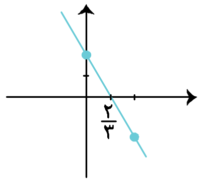
$y=-۲x+۱$

(خط ۵)



$y=-۳x+۲$

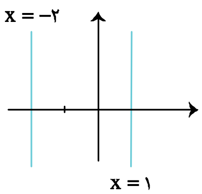
(خط ۶)



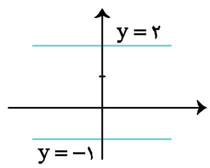
تا الان ۶ تا خط با هم کشیدیم. خطهای ۱ و ۳ و ۴ صعودی، خطهای ۲ و ۵ و ۶ نزولی‌اند. خطهای صعودی قبل از ریشه، منفی و بعد از ریشه، مثبت هستند و خطهای نزولی برعکس یعنی قبل از ریشه علامتشون، مثبت و بعد از ریشه، منفی هستن. ۲ مدل خط دیگه هم داریم که در موردش صحبت نکردیم هنوز. اگه گفتی؟!

خطوط $x=k$ و خطوط $y=k$. خطوط $y=k$ خطوط افقی هستن که تو رسم توابع براکتی ازشون خیلی استفاده می‌کنیم. در تشخیص یک به یک بودن تابع هم لازم می‌شن. خطوط $x=k$ هم خطوط عمودین که برای تشخیص تابع بودن از روی نمودار ازشون استفاده می‌کنیم. مثل اینا:

(خط ۷)



(خط ۸)



علامتشون هم که عوض نمی‌شه.

حالا که فهمیدیم خط چیه بریم سراغ روش‌های نوشتن معادله خط:

۱ با داشتن دو نقطه $A(x_۱,y_۱), B(x_۲,y_۲)$

اول شیب AB رو پیدا می‌کنیم.

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

در گام دوم با استفاده از یکی از نقطه‌ها (مثلاً A) و m معادله خط رو می‌نویسیم:

$$y-y_۱=m(x-x_۱)$$

مثال ۱ **معادله خط گذرنده از دو نقطه با مختصات $A(۱,۴)$ و $B(۳,۸)$ را بنویسید:**

پاسخ:

گام اول: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۸-۴}{۳-۱}=\frac{۴}{۲}=۲$

گام دوم: $\left.\begin{matrix}A(۱,۴)\\ m=۲\end{matrix}\right\} \Rightarrow y-۴=۲(x-۱) \Rightarrow y=۲x+۲$

۲ با داشتن یک نقطه و شیب

$$\left.\begin{matrix}A(x_۱,y_۱)\\ \text{شیب}=m\end{matrix}\right\} \Rightarrow y-y_۱=m(x-x_۱)$$

مثال ۲ **معادله خطی بنویسید که محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کرده و موازی با نیمساز ناحیه اول و سوم باشد.**

پاسخ:

تذکر ۱ محل تلاقی با محور xها؛ $y=0$ و محل تلاقی با محور yها؛ $x=0$، پس اینجا نقطه $(3,0)$ رو داریم:

تذکر ۲ نیمساز ناحیه اول و سوم هم که خط $y=x$ است و شیب آن برابر یک.

$$\left.\begin{matrix} A(3,0) \\ m=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y-0=1(x-3) \Rightarrow y=x-3$$

البته اگر می‌گفت نیمساز ناحیه دوم و چهارم خط $y=-x$ بود و شیبش می‌شد (۱-)

مثال ۳ **معادله خطی را بنویسید که محور xها را در نقطه‌ای به طول $\frac{1}{2}$ و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲- قطع کند.**

پاسخ: طبق تذکر شماره ۱ در مثال قبلی داریم:

$$\left.\begin{matrix} A(\frac{1}{2},0) \\ B(0,-2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-0}{0-\frac{1}{2}}=\frac{-2}{-\frac{1}{2}}=4$$

حالا قطعاً از نقطه B که راحت‌تره استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix} B(0,-2) \\ m=4 \end{matrix}\right\} y-(-2)=4(x-0) \Rightarrow y=4x-2$$

در دوران دیرینگ دیرینگ نوشتن معادله خط با روش زیر رونق فراوان داشت.

اگر خط از نقاط $(P,0)$ و $(0,q)$ بگذرد P را طول از مبدأ و q را عرض از مبدأ گوییم. شایسته است از فرمول $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ برای نوشتن معادله این خط استفاده کنیم. پس مثال بالا را با این فرمول حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} A(\frac{1}{2},0) \Rightarrow P=\frac{1}{2} \\ B(0,-2) \Rightarrow q=-2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{-2}=1 \Rightarrow 2x+\frac{y}{-2}=1$$

حالا برای رهایی از این مخمصه طرفین را در (۲-) ضرب می‌کنیم:

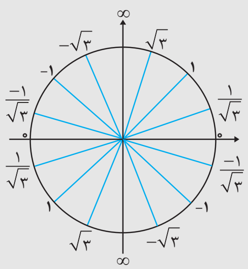
$$-4x+y=-2 \Rightarrow y=4x-2$$

سپس نزدِ وی رفتند و وی ایشان را گفت:
نصیحت امروز
مورچه چیه که کلّه پاچش باشه!!

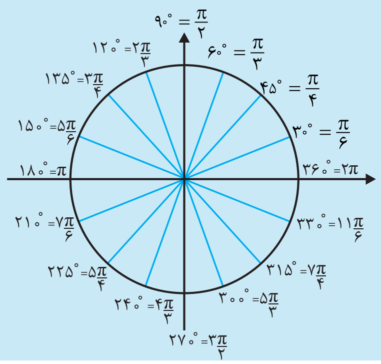
تذکر ۳ بجای اینکه بگیم شیب همون تانژانته می‌گیم تانژانت همون شیبه! شیب خط رو می تونیم از طریق تانژانت زاویه‌ای که با جهت مثبت محور xها می‌سازه هم بدست بیاریم.

البته لازمه‌ی این کار، اینه که تانژانت‌ها رو بلد باشیم. پس مجبورم دایره تانژانت رو همین‌جا بهتون یاد بدم. شیب خط افقی صفره. پس تو صفر و π؛ تانژانت می‌شه صفر. شیب خط عمودی یا قائم بی‌نهایته که البته بعضی از دوستان نزد وی رفتند و گفتند تعریف نشده!! که الان موضوع بحث ما نیست! پس در $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ تانژانت می‌شه ∞. روی خط $y=x$ یعنی نیمساز ناحیه اول و سوم شیب یکه پس تانژانت در زوایای $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ یک میشه. برعکس روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم شیب (۱-) میشه پس در زوایای $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$، $\tan\alpha=-1$. بین ۰ و $\frac{\pi}{4}$ شیب کمتر از یکه که می‌شه $\frac{1}{\sqrt{3}}$ یا $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و بین $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{2}$ شیب بیشتر از یکه که میشه $\sqrt{3}$! اینجا لازمه زاویه‌ها رو هم، در کنار دایره تانژانت ببینید.

دایره تانژانت:



۱۶ زاویه‌ی اصلی برحسب رادیان و درجه:



مثال ۴ معادله خطی را بنویسید که محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده و با جهت مثبت محور xها زاویه ۶۰° می‌سازد.

پاسخ: عرض از مبدأ (۱-) و شیب هم $\tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$. می‌دونیم $y = ax + b$ پس داریم: $y = \sqrt{۳}\,x - ۱$

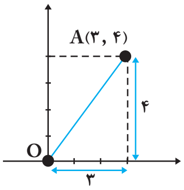
از هیچ نکته‌ای هم استفاده نکردیم.

بخش چهارم فاصله‌ها

چهار تا فاصله مهم داریم که الان یکی یکی بهتون یاد می‌دم.

۱ فاصله نقطه از مبدأ

ببینید بچه‌ها من کلاً حالم از هر چی نکته و فرمول الکی و بدون دلیل به هم می‌خوره. همین فرمولای الکیه که ریاضی رو برای بچه‌ها سخت کرده، هر نقطه‌ای داد تو ذهنت وصلش کن به مبدأ. اگه اسم نقطش $A(x_۰, y_۰)$ باشه طول پاره‌خط OA وتر مثلث قائم الزاویه است که اضلاع قائمش مختصات $x_۰$ و $y_۰$ هستن و داریم: $OA = \sqrt{x_۰^۲ + y_۰^۲}$



مثال ۱ فاصله نقطه $A(۳,۴)$ از مبدأ مختصات؟

پاسخ: همونطور که گفتم سریع تو ذهنت وصلش کن به مبدأ.

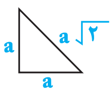
$$OA = \sqrt{(۳)^۲ + (۴)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

البته اینها اعداد پیتاگوراسی معروف هستن که تو فصل مثلثات کتاب دهم به طور کامل و حرفه‌ای براتون توضیح دادم. اینجا هم یه سری از مهماش رو که خیلی استفاده می‌کنیم براتون می‌نویسم.

برخی از اعداد پیتاگوراسی مهم و معروف :

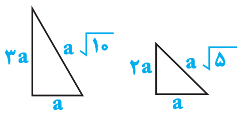
$$۳n, ۴n, ۵n \rightarrow \begin{cases} n = ۱: & ۳, ۴, ۵ \\ n = ۲: & ۶, ۸, ۱۰ \\ n = ۳: & ۹, ۱۲, ۱۵ \end{cases} \quad , \quad ۵n, ۱۲n, ۱۳n \xrightarrow{n=۱} ۵, ۱۲, ۱۳$$

یعنی اگر یک مثلث قائم‌الزاویه داشتی به اضلاع قائمه ۳ و ۴ وترش که همون فاصله‌ی مورد نظرماست میشه ۵ و یا اگر فاصله ۱۵ و یکی از اضلاع ۹ باشه اون یکی میشه ۱۲. یه نکته قشنگ دیگه تو فاصله‌ها وتر مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع برابره و اضلاعی که ۲ برابر یا ۳ برابر همدیگه هستن:

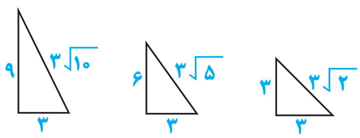


$\rightarrow$ وتر $= \sqrt{a^۲ + a^۲} = \sqrt{۲a^۲} = a\sqrt{۲}$

به همین ترتیب ثابت می‌شه:



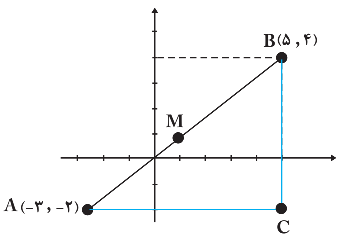
مثلاً:



۲ فاصله دو نقطه و مختصات وسط یک پاره‌خط

باز هم **راه حل اول** و پیشنهاد سرآشپز رسم و دیدن فاصله روی صفحه و بعد از اون پیدا کردن وتر مثلث قائم‌الزاویه است.

مثلاً اگر فاصله دو نقطه $A(-۳, -۲)$ و $B(۵, ۴)$ خواسته شده باشه داریم:



$$AB = \sqrt{(AC)^۲ + (BC)^۲} = \sqrt{(۸)^۲ + (۶)^۲}$$

البته از اولش هم معلومه که ۶ و ۸ و ۱۰ هستند با: $\Rightarrow AB = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$

راه‌حل دوم: حالا اگه بجای عددها از $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ استفاده کنیم داریم:

$$AB = \sqrt{(AC)^۲ + (BC)^۲} = \sqrt{(x_۲ - x_۱)^۲ + (y_۲ - y_۱)^۲}$$

این همون فرمول فاصله دو نقطه در صفحست که اصلاً لازم نبود بلد باشین.

تذکر ۱ مختصات وسط پاره‌خط اینجوریه که وسط طول‌ها و وسط عرض‌ها رو پیدا می‌کنیم. وسط همون میانگین یا معدله که تو مثال صفحه قبل داریم:

$$M(\frac{-۳+۵}{۲},\frac{-۲+۴}{۲})=M(۱,۱)$$

پس اگه بخوایم با $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ مختصات وسط پاره‌خط رو پیدا کنیم داریم: $M(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲})$

یک تذکر ساده ولی مهم:

کلاً مفهوم قدرمطلق برای نشون دادن فاصله خلق شده و فاصله‌های افقی و عمودی رو از روی شکل براحتی می‌تونید ببینید. مثلاً فاصله دو نقطه $(-۱,۲)$ تا $(۳,۲)$ می‌شه چهار واحد یعنی $|-۳-(-۱)|$ که فاصله افقی این دو نقطه است و فاصله نقاط $(۱,۵)$ و $(۱,-۲)$ می‌شه ۷ واحد یعنی $|-۲)-۵|$ که فاصله عمودیشونه. برای درک بهتر این مفهوم محورهای مختصات رو بکشید و نقاط رو ببینید. به طور کلی $|x_A-x_B|$ یعنی فاصله طولی این دو نقطه و $|y_A-y_B|$ فاصله عرضی‌شون.

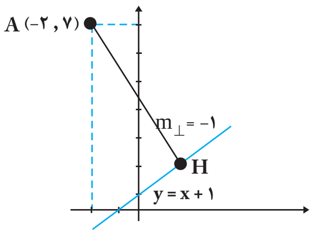
$|a-b|$ فاصله a تا b؛ $|x-a|$ فاصله x تا a و $|x-۱|$ یعنی فاصله x تا ۱ و $|x+۱|$ یعنی فاصله x تا ۱- و ...

۳ فاصله نقطه از خط

روش اول:

اولاً منظور از فاصله نقطه از خط کوتاه‌ترین فاصله یا همون طول پاره‌خطیه که از نقطه موردنظر به خط مذکور عمود می‌شه. مثلاً می‌خوایم با اطلاعاتی که تا همین لحظه بدست آوردیم فاصله نقطه $A(-۲,۷)$ از خط Δ به معادله $y=x+۱$ رو بدست بیاریم. طبق معمول اول یه شکل درست حسابی می‌کشیم و نقطه و خط رو تو دستگاه مختصات دکارتی با هم می‌بینیم، سپس در اولین گام بعد از رسم معادله خط AH رو می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l}A(-۲,۷)\\ m_{AH}=-۱\end{array}\right\}\Rightarrow y-۷=-۱(x-(-۲)) \qquad y=-x+۵$$



این شد معادله خط AH

حالا خط AH رو با Δ قطع می‌دیم:

$$x+۱=-x+۵ \Rightarrow ۲x=۴ \Rightarrow x=۲ \xrightarrow{\text{جاگذاری}} y=۳$$

بنابراین محل تلاقی یعنی نقطه H می‌شه $(۲,۳)$. حالا کافیه فاصله دو نقطه رو محاسبه کنیم:

$$AH=\sqrt{(-۲-۲)^۲+(۷-۳)^۲}=\sqrt{۴^۲+۴^۲}=۴\sqrt{۲}$$

روش دوم:

روش کار به این ترتیب که اگر فاصله نقطه $A(x,y)$ رو از خط به معادله $ax+by+C=۰$ بخوایم کافیه به ترتیب مراحل زیر عمل کنیم:

گام اول: خط رو به فرم گسترده در میاریم و داخل قدرمطلق که برای فاصله خلق شده قرار می‌دیم به این ترتیب: $|ax+by+C|$

گام دوم: بجای x طول نقطه A یعنی $x_۱$ و بجای y عرض نقطه A یعنی $y_۱$ رو جاگذاری می‌کنیم.

گام سوم: پاسخ رو به $\sqrt{a^۲+b^۲}$ که نماد پیتاگوراسه و در فرمول‌های فاصله حضور داره تقسیم می‌کنیم یعنی:

$$d=\frac{|ax_۱+by_۱+C|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

مثلاً تو همین مثال خودمون:

گام اول: خط $y=x+۱$ رو به صورت $x-y+۱$ می‌نویسیم.

گام دوم: بجای x نقطه ۲- و بجای y، ۷ می‌ذاریم:

$$|(۱)(-۲)-(۷)+۱|=۸$$

گام سوم: ۸ رو به $\sqrt{a^۲+b^۲}$ یعنی $\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$ تقسیم می‌کنیم:

$$d=\frac{۸}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=۴\sqrt{۲}$$

البته که این کار بسیار راحت‌تره و به عزیزانم استفاده از این رابطه جهت محاسبه فاصله از خط رو توصیه می‌کنم.

مثال ۲ مطلوبست فاصله نقطه $A(-۱,۲)$ از خط به معادله $۳x-۴y-۹=۰$؟

پاسخ:

$$d=\frac{|۳(-۱)-۴(۲)-۹|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{|-۲۰|}{۵}=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

تذکر یکی از مهم‌ترین کاربردهای فاصله نقطه از خط فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره است که می‌شه شعاع دایره!

۴ فاصله دو خط موازی

اولاً: اگر دو خط موازی نباشن فاصله‌ای براشون تعریف نمی‌شه.

ثانیاً: اگر دو خط موازی بود اول به فرم‌های $ax+by+C=۰$ و $ax+by+C'=۰$ می‌نویسیمشون و در مرحله بعدی $|C-C'|$ رو بدست بیاریم.

تو مرحله آخر هم که طبق معمول روابط فاصله، این عدد رو به $\sqrt{a^۲+b^۲}$ تقسیم می‌کنیم:

$$d=\frac{|C-C'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

پیش‌نیاز دوم

شناخت کسرها و ریشه و توان و قوانین رادیکال + اشتباهات رایج دانش‌آموزی

بخش اول اصول محاسبه و نگارش در ریاضی

گام بعدی اعمال جبری روی اعداده. جمع و تفریق و ضرب و تقسیم رو که انشاالله بلدین. الان چند تا مثال برای یادآوری میارم که دیگه خیالم راحت باشه همه چیز رو درس دادم به اضافه جدول ضرب!

$۱+۱=۲,۱+۲=۳,۲+۲=۴,۵+۳=۸,۵-۳=۲,۵-۷=-۲$

$۳(۴+۱)=۳\times۵=۱۵,۳(۵-۷)=۳(-۲)=-۶$

تذکر ۱ تو این محاسبات بجای $۳\times(-۲)$ می‌گیم $۳(-۲)$ یعنی همون ضرب که میشه ۶-!

$$۱۰\div۱=۱۰\quad,\quad ۱۰\div۲=\frac{۱۰}{۲}=۵\quad,\quad ۱۰\div۵=\frac{۱۰}{۵}=۲\quad,\quad ۵(\frac{۷}{۶})=\frac{۳۵}{۶}$$

$$\frac{۱}{۵}(\frac{۷}{۶})=\frac{۷}{۳۰}\quad,\quad \frac{۱}{۵}+\frac{۷}{۶}=\frac{۶+(۷\times۵)}{۵\times۶}=\frac{۶+۳۵}{۳۰}=\frac{۴۱}{۳۰}$$

تذکر ۲ به این آخری می‌گفتین مخرج مشترک!

اجازه نداریم اون ۲ها رو با هم بزنین:

$$\frac{۵+۲}{۲}=\frac{۷}{۲}$$

در واقع اون ۲ تو مخرج متعلق به هر دو عدد تو صورته و می‌تونین با قلبتون تفکیکش کنین که میشه همون

$$\frac{۵+۲}{۲}=\frac{۵}{۲}+\frac{۲}{۲}=۲/۵+۱=۳/۵\rightarrow\frac{۷}{۲}$$

تذکر ۳ تفکیک برعکس نداریم:

$$\frac{۲}{۵+۲}\neq\frac{۲}{۵}+\frac{۲}{۲}\longrightarrow\frac{۲}{۵+۲}=\frac{۲}{۷}$$

تذکر ۴ یکی از مشکلات بزرگ بچه‌ها تشخیص بزرگتر یا کوچکتر بودن یه کسره. خب پس این مساله رو دسته‌بندی کنیم.

حالت اول: مخرج‌های مساوی ⇐ کسری بزرگتره که صورتش بزرگتر باشه. $\frac{۳}{۵} > \frac{۲}{۵}$

حالت دوم: صورت‌ها مساوی ⇐ کسری بزرگتره که مخرجش کوچکتر باشه. $\frac{۲}{۵} < \frac{۲}{۳}$

حالت سوم: اگه هیچکدوم از دو حالت بالا نبود اول باید کسر رو نسبت به $\frac{۱}{۲}$ بسنجین. مثلاً $\frac{۳}{۵}$ از $\frac{۴}{۹}$ بزرگتره چون $\frac{۳}{۵}$ از نیم بیشتره $(\frac{۲/۵}{۵})$ ولی $\frac{۴}{۹}$ از نیم کوچکتره $(\frac{۴/۵}{۹})$. یا به عنوان یه مثال دیگه $\frac{۹}{۲۰}$ از $\frac{۱۶}{۳۰}$ کوچکتره چون $\frac{۹}{۲۰}$ از نیم یعنی $\frac{۱۰}{۲۰}$ کمتره ولی $\frac{۱۶}{۳۰}$ از نیم یعنی $\frac{۱۵}{۳۰}$ بیشتره!

حالت چهارم: اگه هر دو از نیم کوچکتر یا از نیم بزرگتر بودن مجبوریم مخرج مشترک بگیریم.

مثلاً $\frac{۴}{۷}$? $\frac{۳}{۵}$ همونطور که می‌بینید هر دو از $\frac{۱}{۲}$ یا همون نیم خودمون بزرگترین پس مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\frac{۳}{۵}\times\frac{۷}{۷} \ ? \ \frac{۴}{۷}\times\frac{۵}{۵} \Rightarrow \frac{۲۱}{۳۵} > \frac{۲۰}{۳۵} \Rightarrow$$

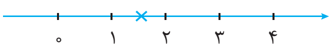
پس $\frac{۳}{۵}$ بزرگتر بود!

یه مثال دیگه:

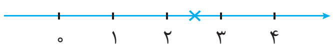
$$\frac{۳}{۸} \ ? \ \frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{۳}{۸}\times\frac{۱۰}{۱۰} \ ? \ \frac{۴}{۱۰}\times\frac{۸}{۸} \Rightarrow \frac{۳۰}{۸۰} < \frac{۳۲}{۸۰}$$

تذکر ۵ یکی از ضایع‌ترین نقاط ضعف بچه‌ها اینه که نمی تونن کسرها رو به صورت مخلوط یا ساده شده بنویسن و روی محور نشون بدن. منظورم کسرهاییه که صورتش از مخرج بیشتره.

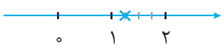
مثال (۱): $\frac{۳}{۲} = \frac{۲}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱\frac{۱}{۲} = ۱/۵$



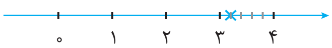
مثال (۲): $\frac{۵}{۲} = \frac{۴}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۲\frac{۱}{۲} = ۲/۵$



مثال (۳): $\frac{۵}{۴} = \frac{۴}{۴} + \frac{۱}{۴} = ۱\frac{۱}{۴}$



مثال (۴): $\frac{۱۶}{۵} = \frac{۱۵}{۵} + \frac{۱}{۵} = ۳\frac{۱}{۵}$



تذکر ۶ تو ریاضی همیشه دنبال ساده‌سازی هستیم. مثلاً به جای $۳+۳+۳+۳$ می‌گیم ۴ سه تا یا همون ۴×۳. بجای $۳+۳+...+۳$ که n تا باشن می‌گیم $۳n$.

بجای $۳\times۳\times۳\times۳$ می‌گیم ۳ به توان ۴ یا همون $۳^۴ = ۸۱$. بجای $۳\times۳\times...\times۳$ که n تا باشن می‌گیم ۳ به توان n یا ۳^n! برعکس توان هم می‌شه ریشه! مثال‌ها رو با هم ببینیم لطفاً!

$۲^۲ = ۴ \Rightarrow \sqrt{۴} = ۲ \rightarrow$ می‌خونیم رادیکال ۴ برابر است با ۲

$۲^۳ = ۸ \Rightarrow \sqrt[۳]{۸} = ۲ \rightarrow$ می‌خونیم رادیکال ۸ به فرجه ۳ برابر است با ۲.

فرجه ۲ رو نمی‌نویسیم و به صورت $\sqrt{\ }$ خالی می‌ذاریم ولی فرجه‌های دیگه نوشته می‌شه. جدول بسیار مهمی از توان‌های طبیعی اعداد اول یک رقمی داریم که بلد بودنش واجبه بچه‌ها!

به قول کتابتون این یک رابطه‌ی دو سویه است! زمان ما می‌گفتن دو طرفه یا دو شرطی و با علامت $\Leftrightarrow$ نشونش می‌دادن. توان‌های ۲ رو که می‌دونین باید فول باشین.

برای این کار بهتره توان‌های مهم رو هم بلد باشین:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۲^n	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴
۳^n	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	دیگه لازم نیست				
۵^n	۵	۲۵	۱۲۵	۶۲۵	دیگه لازم نیست					
۶^n	۶	۳۶	۲۱۶	دیگه لازم نیست						
۷^n	۷	۴۹	۳۴۳	دیگه لازم نیست						

همون‌طور که الان دیدیم توان همون تکرار عمل ضربه. مثلاً به جای $۲\times۲\times۲\times۲$ می‌گیم $۲^۴$ (۲ به توان ۴). اگه توان زوج باشه جوابش همیشه یه عدد مثبت می‌شه چون حتی اگر عدد، منفی هم باشه وقتی تعداد دفعات تکرارش تو ضرب زوج بشه مثبت می‌شه.

مثلاً $۱۶=۲^۴=(-۲)(-۲)(-۲)(-۲)=(-۲)^۴$ می‌بینی که منفی‌ها دو تا دو تا با هم حذف می‌شن ولی توان فرد، علامت عدد رو حفظ می‌کنه.

مثلاً $-۳۲=-(۲^۵)=(-۲)(-۲)(-۲)(-۲)(-۲)=(-۲)^۵$

تذکر ۷

۱ اولاً $(-۲)^۴$ با $-(۲)^۴$ فرق می‌کنه. اولی می‌شه ۱۶ و دومی ۱۶- ولی $(-۲)^۵$ با $-(۲)^۵$ فرق نمی‌کنه و هر دو ۳۲- می‌شن.

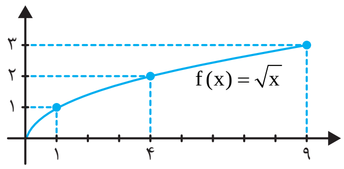
۲ وقتی می‌خوایم چند تا عدد مثبت رو تو هم ضرب کنیم بهتره از همون علامت ضرب استفاده کنیم ولی اگر عدد منفی داشتیم استفاده از پرانتز مناسب‌تره. مثلاً $۲(-۳)(-۵)=۳۰$ $\quad ۲\times۳\times۵=۳۰$

۳ در ضرب عبارت‌های جبری مثل x و y هم اگر منفی داشتن از پرانتز استفاده می‌کنیم و اگر مثبت بودن هیچی بینشون نمی‌ذاریم. مثلاً x ضربدر y رو به صورت xy می‌نویسیم و اگر x در $-y$ ضرب بشه می‌نویسیم $x(-y)$ که می‌شه $-xy$

یک اشتباه رایج دانش‌آموزی تو کلاس می‌پرسم رادیکال ۹ چی میشه بچه‌ها میگن ±۳ .

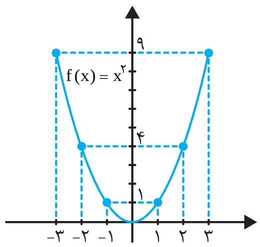
این کاملاً غلطه چون $\sqrt{۹}=۳$.

$$۳^۲=۹,(-۳)^۲=۹\Rightarrow \cancel{\sqrt{۹}=\pm۳}$$



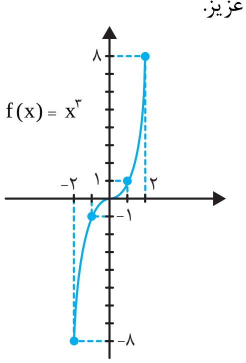
این یک غلط فاحشه بچه‌های عزیزم. تابع $\sqrt{x}$ به صورت بالاست هیچ وقت مقدارش منفی نمیشه بچه‌ها.

همونطور که تو نمودار می‌بینید $\sqrt{۱}=۱$ ، $\sqrt{۴}=۲$ و $\sqrt{۹}=۳$. اصلاً $\sqrt{x}$ همواره بالای محور x هاست و جوابش به هیچ عنوان نمی‌تونه یک مقدار منفی باشه. ولی از اون طرف تابع $x^۲$ هر x ای که بهش بدی جواب مثبت بهت می‌ده. نمودارش رو ببین. همونطور که می‌بینید.

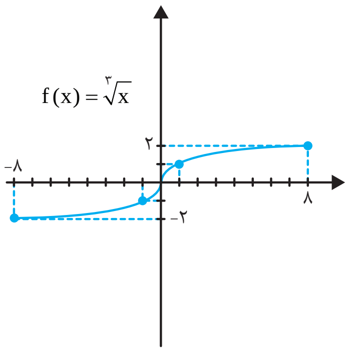


$$(\pm۱)^۲=۱,(\pm۲)^۲=۴,(\pm۳)^۲=۹$$

حالا ببینیم توان ۳ و فرجه‌ی ۳ یا همون ریشه‌ی سوم و بطور کلی توان‌های فرد مکانیزمشون چیه. وقتی یه عددی به توان ۳ می‌رسه تابع $x^۳$ این کار رو انجام می‌ده که علامت رو حفظ می‌کنه. رادیکال فرجه‌ی ۳ هم به همین صورته بچه‌های عزیز.



همونطور که می‌بینید $(-۲)^۳=-۸,۲^۳=۸$



می‌بینید که $\sqrt[۳]{-۸}=-۲$ و $\sqrt[۳]{۸}=۲$

حالا وقتشه که یه جمع‌بندی خوب داشته باشیم از این حرفامون.

یک اشتباه رایج

وقتی $x^۲$ مساوی ۴ می‌شه x می‌تونسته هم ۲ باشه و هم ۲-. پس وقتی می‌خوایم معادله‌ی $x^۲=۴$ رو حل کنیم مراحلش به این ترتیبه:

مرحله‌ی اول: از طرفین جذر می‌گیریم: $\sqrt{x^۲}=\sqrt{۴}$

مرحله‌ی دوم: x از زیر زندان رادیکال با دستبند قدرمطلق بیرون میاد ولی $\sqrt{۴}$ می‌شه ۲: $|x|=۲$

مرحله‌ی سوم: حالا چون $|x|$ ۲ شده؛ توش می‌تونسته ۲ یا ۲- باشه: $x=\pm ۲$

پس علت وجود اون ±۲ به خاطر قدرمطلقه نه رادیکال چون $\sqrt{۴}=۲$

پس $\sqrt[n]{a^n}$ دو حالت پیدا می‌کنه. اگه n فرد باشه جواب a میشه ولی اگر n زوج باشه جواب می‌شه $|a|$ یعنی همونطور که گفتم x از زیر زندان رادیکال بیرون میاد ولی با دستبند قدرمطلق $|x|$ = $\sqrt{x^۲}$ و بطور کلی اگر $|x|=a$ باشه $x=\pm a$ بوده.

که البته این رابطه فقط توی متغیرهاست و برای اعداد لازم نمیشه چون رادیکال فرجه زوج فقط برای اعداد مثبت تعریف می‌شه یعنی زیر رادیکال هیچ وقت عدد منفی وارد نمی‌شه و جوابش هم همیشه مثبته. حالا چند تا مثال خوب از رابطه‌ی دو سویه‌ی توان و ریشه با هم ببینیم که خالی از لطف نیست.

$۹^۲=۸۱ \Leftrightarrow \sqrt{۸۱}=۹$ | $(-۳)^۳=-۲۷ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$

$(-۲)^۳=-۸ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۸}=-۲$ | $۲^۴=۱۶ \Leftrightarrow \sqrt[۴]{۱۶}=۲$

$(۰/۵)^۲=۰/۲۵ \Leftrightarrow \sqrt[۲]{۰/۲۵}=۰/۵$ | $(۰/۲۵)^۲=۰/۰۶۲۵ \Leftrightarrow \sqrt[۲]{۰/۰۶۲۵}=۰/۲۵$

$\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵} \Leftrightarrow (۳\sqrt{۵})^۲=۴۵$ | $\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲} \Leftrightarrow (۵\sqrt{۲})^۲=۵۰$

$\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵} \Leftrightarrow (۲\sqrt{۵})^۲=۲۰$ | $۱^۶=۱ \Leftrightarrow \sqrt[۶]{۱}=۱$

$\sqrt[۳]{۴۸}=۲\sqrt[۳]{۶} \Leftrightarrow (۲\sqrt[۳]{۶})^۳=۴۸$ | $(-۰/۰۵)^۲=۰/۰۰۲۵ \Leftrightarrow \sqrt{۰/۰۰۲۵}=۰/۰۵$

چقدر خوبه که اینجا مربع کامل اعداد دو رقمی معروف رو ببینید و همینطور اعشاری‌هاشون رو یاد بگیرید.

$$۱۱\times۱۱=۱۲۱ \Rightarrow ۱/۱\times۱/۱=۱/۲۱ \Rightarrow \sqrt{۱/۲۱}=۱/۱ \Rightarrow \sqrt{۱/۲}\simeq۱/۱$$

$$۱۲\times۱۲=۱۴۴ \Rightarrow ۱/۲\times۱/۲=۱/۴۴ \Rightarrow \sqrt{۱/۴۴}=۱/۲ \Rightarrow \sqrt{۱/۴}\simeq۱/۲$$

$$۱۳\times۱۳=۱۶۹ \Rightarrow ۱/۳\times۱/۳=۱/۶۹ \Rightarrow \sqrt{۱/۶۹}=۱/۳ \Rightarrow \sqrt{۱/۶}\simeq۱/۳$$

$$۱۴\times۱۴=۱۹۶ \Rightarrow ۱/۴\times۱/۴=۱/۹۶ \Rightarrow \sqrt{۱/۹۶}=۱/۴ \Rightarrow \sqrt{۱/۹}\simeq۱/۴$$

$$۱۵\times۱۵=۲۲۵ \Rightarrow ۱/۵\times۱/۵=۲/۲۵ \Rightarrow \sqrt{۲/۲۵}=۱/۵ \Rightarrow \sqrt{۲/۲}\simeq۱/۵$$

$$۱۶\times۱۶=۲۵۶ \Rightarrow ۱/۶\times۱/۶=۲/۵۶ \Rightarrow \sqrt{۲/۵۶}=۱/۶ \Rightarrow \sqrt{۲/۵}\simeq۱/۶$$

بخش دوم قوانین توان

$$\underbrace{۵\times۵\times۵\times۵}_{\text{۴ بار}}=۵^۴$$

بنابراین $\underbrace{a\times a\times a\times\dots\times a}_{\text{n بار}}=\underset{\text{پایه}}{a}^{\,n\,\leftarrow\text{توان یا نما}}\quad (n\in\mathbb{N})$

❶ هر عدد غیرصفر به توان صفر برابر یک می‌شه.

$$۱)\, a^۰=۱\quad,\quad (a\neq۰)\ \xrightarrow{\text{مثال}}\ ۵^۰=۱$$

❷ تو ضرب دو عدد تواندار اگه پایه‌ها مساوی باشن یکی از پایه‌ها رو می‌نویسیم و توان‌ها رو با هم جمع می‌کنیم

$$۲)\, a^m\times a^n=a^{m+n}\ \xrightarrow{\text{مثال}}\ ۵^۲\times۵^۷=۵^۹$$