

آبی که برآسود زمینش بخورد زود دریا شود آن رود که پیوسته روان است

معرفی مجموعه‌ها



مفهوم مجموعه نقش بسیار اساسی در شاخه‌های ریاضیات دارد بنابراین برای درک واقعی هر شاخه مرتبط نیاز به شناخت نظریه‌ی مجموعه‌ها ضروری است. مفهوم مجموعه نخستین بار توسط «گئورگ کانتور» ریاضی‌دان آلمانی در اواخر قرن نوزدهم بیان شد.

مجموعه: مجموعه را معمولاً تعریف نمی‌کنیم. آنچه به عنوان توصیف مجموعه بیان می‌شود به دلیل نزدیک کردن ذهن به مفهوم آن می‌باشد. از نظر ریاضی، یک مجموعه، دسته یا گروهی از اشیاء متمایز و مشخص است. برای مثال، گروه دانش‌آموزان کلاس اول یک مجموعه است ولی گروه دانش‌آموزان زنگ کلاس اول مجموعه نیست. زیرا زنگ، از نظر افراد مفهومی متفاوت است.

توجه ۱: نمایش ریاضی یک مجموعه با استفاده از نماد $\{ \}$ (آکولاد) می‌باشد که همه یا بعضی از اعضای آن مجموعه در داخل آن نوشته می‌شود.

مثال ۱: مجموعه‌ی ماه‌های فصل بهار (سال شمسی) را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

{خرداد، اردیبهشت، فروردین}

مثال ۲: مجموعه‌ی حروف صدادار انگلیسی را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

{a, e, i, o, u}

مثال ۳: مجموعه عددهای فرد (Odd) و مجموعه عددهای زوج (Even) را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$O = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

توجه ۲: هر مجموعه با اعضای آن مشخص می‌شود و هر خاصیتی یک مجموعه را مشخص می‌کند. (مانند فرد بودن، اول بودن، زوج بودن و ...)

عضو یک مجموعه: به افراد یا اشیایی که کاملاً مشخص یا حداقل در یک خاصیت، مشترک بوده و یک مجموعه را تشکیل دهند، اعضای آن مجموعه می‌گوییم.

توجه ۳: گروه‌هایی که اعضای آن به زمان، مکان و سلیقه شخصی بستگی دارند، مجموعه نیستند.

مثال ۴: گروه دانش‌آموزان زنگ، سه عدد فرد، شعرای مشهور، عددهای بزرگ و ... مجموعه نیستند. زیرا مثلاً در مورد زنگ بودن هیچ ملاکی مطرح نیست و سلیقه‌ی شخصی در آن دخالت دارد.

توجه ۴: اسامی مجموعه‌ها را با حروف بزرگ لاتین (A, B, ...) می‌نویسیم، ولی اعضای مجموعه را هیچ‌گاه با حروف بزرگ نمی‌نویسیم.

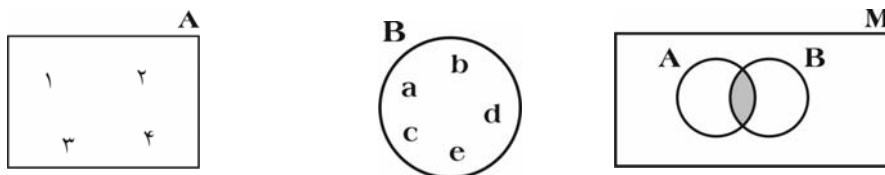
نماد عضویت (تعلق): عضو بودن یک شی در یک مجموعه را با نماد \in و عدم عضویت آن را با \notin مشخص می‌کنیم.

مثال ۵: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ در این صورت $5 \in A$ ، $0 \notin A$ ، $2 \in A$ و $3 \notin A$.

مجموعه‌ی مرجع: مجموعه‌ای را که شامل همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث باشد (مجموعه‌ی عالم سخن) مجموعه‌ی مرجع می‌نامیم. مثلاً وقتی از عددهای صحیح مثبت، منفی، فرد و زوج (Z) را مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم و وقتی از عددهای کسری، منفی و گنگ صحبت می‌کنیم می‌توانیم مجموعه‌ی عددهای حقیقی (R) را مجموعه‌ی مرجع معرفی می‌کنیم. مجموعه‌ی مرجع را با M نمایش می‌دهیم.

نمودار ون: نمودار ون یکی از روش‌های حل آسان مسائل مربوط به مجموعه‌ها است که نخستین بار توسط یک ریاضیدان انگلیسی به نام «جان ون» ارائه شد.

در نمودار ون مجموعه‌ی مرجع (بزرگ‌ترین مجموعه‌ی مطرح‌شده در مسئله) را با یک مستطیل به نام M نشان می‌دهیم و مجموعه‌های کوچک‌تری که با مجموعه‌ی مرجع مشترکاتی دارند را با شکل‌های دایره، بیضی، مربع، مثلث و ... و با حروف A, B, C و ... نشان می‌دهیم.



مثال ۶: از گروه‌های زیر فقط (پ) نمایش یک مجموعه ریاضی است.

- آ. شعرای نامی جهان
ب. جانوران روی زمین
پ. سه عدد زوج متوالی
ت. گل‌های خوشبو

توجه ۵: گاهی تعداد اعضای یک مجموعه زیاد است و نمی‌توانیم همه‌ی اعضای آن را بنویسیم. در این صورت چند عضو مجموعه را نوشته و سه نقطه بعد یا قبل از آن‌ها می‌گذاریم.

مثال ۷: مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج را به صورت: $A = \{2, 4, 6, \dots\}$ و مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد کوچکتر از ۱۰۰ را به صورت: $B = \{1, 3, 5, \dots, 97, 99\}$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه تهی: هر مجموعه که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعه‌ی تهی نام دارد و با نماد $\{\}$ یا \emptyset نمایش داده می‌شود.

مثال ۸: مجموعه‌ی عددهای طبیعی بین ۳۵ و ۳۶، مجموعه‌ی اول زوج بزرگتر از ۱۰ و مجموعه‌ی عددهای طبیعی منفی نمونه‌هایی از مجموعه‌های تهی هستند.

مجموعه‌ی تک عضوی: هر مجموعه که فقط یک عضو داشته باشد، مجموعه تک‌عضوی نام دارد.

مثال ۹: مجموعه‌ی $\{0\}$ ، $\{\emptyset\}$ ، $\{\pi\}$ و عددهای زوج بین عددهای ۳ و ۵، نمایشی از مجموعه‌های تک‌عضوی هستند.

مجموعه‌های خاص در مجموعه‌ی عددهای حقیقی (R)

۱- مجموعه‌ی عددهای طبیعی

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

۲- مجموعه‌ی عددهای حسابی

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

۳- مجموعه‌ی عددهای صحیح

$$Z = \{\dots, -3, -2, 0, +1, +2, \dots\}$$

۴- مجموعه‌ی عددهای گویا

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$$

۵- مجموعه‌ی عددهای گنگ: هر عدد حقیقی که گویا نباشد گنگ است.

$$Q' = R - Q$$

عددهای $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, π و ... عددهای گنگ (اصم) هستند.

۶- مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج:

$$E = \{2, 4, 6, \dots\}$$

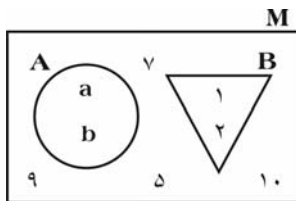
۷- مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد:

$$O = \{1, 3, 5, \dots\}$$

۸- مجموعه‌ی عددهای اول:

$$P = \{2, 3, 5, \dots\}$$

مثال ۱۰:



$$M = \{a, b, 1, 2, 5, 7, 9, 10\}$$

$$A = \{a, b\}$$

$$B = \{1, 2\}$$

باره موفقیت سر راست نیست پپی وجود دارد به نام شکست
 دوربرگردانی به نام سردرگمی سرعت‌گیرهایی به نام دوستان
 پراغ‌قرمزهایی به نام دشمنان پراغ‌احتیاطهایی به نام خانواده
 تیره‌های پنپری فواید داشت به نام شغل
 اما اگر یدکی به نام عزم داشته‌باشید
 موتوری به نام استقامت و راننده‌ای به نام خدا
 به جایی فواید رسید که موفقیت نامیده‌می‌شود



مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

نمایش یک مجموعه با علائم ریاضی: هرگاه اعضای یک مجموعه را با نمادهای ریاضی معرفی می‌کنیم، در واقع آن مجموعه را به صورت ریاضی نمایش داده‌ایم.

مثال ۱۱: مجموعه‌های { عددهای طبیعی بین ۱۰ و ۲۰ }، $A = \{۲۰, ۱۰\}$ ، { عددهای طبیعی فرد کوچکتر از ۱۰ } $B = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹, \dots\}$ و $C = \{۱, ۴, ۹, ۱۶, \dots\}$ به زبان ریاضی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$A = \{x | x \in \mathbb{N}, 10 < x < 20\}$$

$$B = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}, x < 10\}$$

$$C = \{x^2 | x \in \mathbb{N}\} \text{ یا } C = \{x^2 | x \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$$

مثال ۱۲ (آ): مجموعه‌های

$$A = \{2^x | x \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{x | x - 5 = y, y \in \mathbb{N}\}$$

با اعضا به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$A = \{2, 4, 8, \dots\}$$

$$B = \{6, 7, 8, \dots\}$$

(ب) درستی یا نادرستی رابطه‌های داده شده را تعیین می‌کنیم.

$$15 \notin A \text{ درست}$$

$$1000 \in B \text{ درست}$$

$$51 \notin B \text{ نادرست}$$

$$\frac{4}{2} \notin A \text{ نادرست}$$

$$32/5 \in A \text{ نادرست}$$

$$21\frac{6}{3} \in B \text{ درست}$$

زیرمجموعه: هرگاه تمامی عضوهای مجموعه‌ای A در مجموعه‌ی B باشند در این صورت مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی B است و به صورت $A \subset B$ نمایش می‌دهیم، علامت \subset نماد زیرمجموعه می‌باشد. اگر بعضی از اعضای مجموعه A در مجموعه B نباشد خواهیم گفت $A \not\subset B$ و می‌خوانیم مجموعه A زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی B نمی‌باشد.

مثال ۱۳: $A = \{a, b, c\}$ زیرمجموعه‌ی $B = \{a, b, c, d, e\}$ می‌باشد.

$$A \subset B$$

و $C = \{1, 3, 4\}$ زیر مجموعه‌ی $D = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ نمی‌باشد.

$$C \not\subset D$$

و $E = \{2, 4, 6\}$ زیرمجموعه‌ی $F = \{6, 4, 2\}$ می‌باشد و بالعکس.

$$E \subset F, F \subset E$$

و $G = \{ \text{دانش آموزان کلاس نهم از مدرسه } M \}$ زیرمجموعه‌ی $H = \{ \text{دانش آموزان مدرسه } M \}$ می‌باشد.

$$G \subset H$$

دو مجموعه برابر: دو مجموعه‌ی A و B را برابر گوئیم هرگاه $A \subset B$ و $B \subset A$ پس می‌نویسیم:

$$A \subset B, B \subset A \Leftrightarrow A = B$$

مثال ۱۴: مجموعه‌های $\{a, b, c\}$ و $\{a, b, a, b, c\}$ با هم و مجموعه‌های $\{1, 2\}$ و $\{1, 2, 1, 2, 2\}$ با هم برابرند. پس اگر در مجموعه‌ای اعضا تکرار شوند برای به دست آوردن تعداد اعضا، اعضای تکراری را حذف می‌کنیم.
ب) مجموعه‌های $\{1, 2, 3\}$ ، $\{1, 3, 2\}$ و $\{3, 1, 2\}$ با هم برابرند یعنی اگر اعضای یک مجموعه جابه‌جا شوند، مجموعه حاصل مساوی همان مجموعه است.

توجه ۶: هر مجموعه زیر مجموعه خودش می‌باشد $(A \subset A)$ و مجموعه‌ی تهی زیر مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست $(\emptyset \subset A)$ [A یک مجموعه‌ی دلخواه است.]
 به دو مجموعه‌ی A و \emptyset زیر مجموعه‌های بدیهی مجموعه A می‌گوییم.

مثال ۱۵: همه‌ی زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{a, b\}$ را بنویسید. A_1 را بخوانید A یک، A_2 را بخوانید A دو، ... به $1, 2, 3$ و ... که پایین حرف A نوشته می‌شود اندیس A می‌گوییم.

$A_1 = \emptyset$ $A_2 = \{a\}$ $A_3 = \{b\}$ $A_4 = \{a, b\}$
 مجموعه‌ی A دارای ۴ زیرمجموعه است.

مثال ۱۶: همه‌ی زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی $B = \{1, 2, 3\}$ را می‌نویسیم:

$B_1 = \emptyset$ $B_2 = \{1\}$ $B_3 = \{2\}$ $B_4 = \{1, 2\}$
 $B_5 = \{1, 3\}$ $B_6 = \{2, 3\}$ $B_7 = \{1, 2, 3\}$

بنابراین مجموعه‌ی B دارای ۸ زیرمجموعه است.

توجه ۷: اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد در این صورت دارای 2^n زیرمجموعه می‌باشد.

یعنی یک مجموعه ۴ عضوی دارای $2^4 = 16$ زیرمجموعه

و یک مجموعه ۱۰ عضوی دارای $2^{10} = 1024$ زیرمجموعه می‌باشد.

زیر مجموعه‌های محض یک مجموعه: اگر از همه‌ی زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، خود آن مجموعه را حذف کنیم $(2^n - 1)$ زیرمجموعه خواهیم داشت که به آن‌ها زیرمجموعه‌های محض آن مجموعه می‌گوییم.

مثال ۱۷: تعداد زیر مجموعه‌های محض مجموعه‌ی $A = \{\oplus, \square, \circ, \triangle\}$ چند تا است؟

تعداد زیرمجموعه‌های محض $2^n - 1 = 2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$ $n = 4 \Rightarrow$

مثال ۱۸: مجموعه‌ی $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ دارای چند زیرمجموعه است؟

تعداد زیرمجموعه‌ها $2^n = 2^6 = 64$ $n = 6 \Rightarrow$

مثال ۱۹: مجموعه‌ی $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 4 < x < 5\}$ دارای چند زیرمجموعه است؟

تعداد زیرمجموعه‌ها $2^n = 2^0 = 1$ $n = 0 \Rightarrow$ $A = \{ \}$

مثال ۲۰: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه ۳۲ است آن مجموعه چند عضو دارد؟

آن مجموعه ۵ عضو دارد.

$$2^n = 32 \Rightarrow 2^n = 2^5 \Rightarrow n = 5$$

مثال ۲۱: تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه ۱۲۷ است. آن مجموعه چند عضو دارد؟

$$2^n - 1 = 127 \Rightarrow 2^n = 127 + 1 \Rightarrow 2^n = 128 \Rightarrow 2^n = 2^7 \Rightarrow n = 7$$

آن مجموعه ۷ عضو دارد.

عدد اصلی یک مجموعه: تعداد عضوهای هر مجموعه را عدد اصلی آن مجموعه می‌گوییم و عدد اصلی یک مجموعه مانند A را به صورت $n(A)$ نشان می‌دهیم و n می‌خوانیم.

مثال ۲۲: عدد اصلی مجموعه‌ی $A = \{2, 3, 4, 5\}$ ، $n(A) = 4$ می‌باشد.

مجموعه نامتناهی (بی‌پایان): اگر تعداد اعضای یک مجموعه را تعیین کنیم (عدد اصلی یک مجموعه) و عددی طبیعی یافت شود که از عدد اصلی آن مجموعه بزرگتر باشد آن‌گاه آن مجموعه را متناهی می‌گوییم.

مثال ۲۳: مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3, \dots, 999\}$ یک مجموعه متناهی است.

$$n(A) = 999 \quad 1000 > 999 \quad \Rightarrow \quad \text{مجموعه } A \text{ مجموعه‌ی متناهی است.}$$

مثال ۲۴: مجموعه‌ی $A = \{2, 4, 6, \dots\}$ یک مجموعه نامتناهی است.

توجه ۸: مجموعه‌ی $A = \{\{2, 3, 4, 5\}\}$ یک مجموعه‌ی تک عضوی است، یعنی عضو مجموعه A ، مجموعه‌ای است که دارای ۴ عضو است به هر یک از عددهای ۲، ۳، ۴ و ۵ عضو مجموعه‌ی A می‌گوییم.

مثال ۲۵: زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $A = \{\{1, 2, \dots, 10\}\}$ به صورت زیر می‌باشد.

$$n(A) = 1 \Rightarrow 2^n = 2^1 = 2 \quad A_1 = \emptyset \quad A = \{\{1, 2, \dots, 10\}\}$$

مثال ۲۶: زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{1, \{2, 3\}, 3\}$ به صورت زیر می‌باشد.

$$n = 3 \quad 2^n = 2^3 = 8$$

$$A_1 = \{1\} \quad A_2 = \{\{2, 3\}\} \quad A_3 = \{3\} \quad A_4 = \{1, \{2, 3\}\}$$

$$A_5 = \{1, 3\} \quad A_6 = \{\{2, 3\}, 3\} \quad A_7 = \emptyset \quad A_8 = \{1, \{2, 3\}, 3\}$$

حرف‌های زیبا همیشه راست نیستند و حرف‌های راست همیشه زیبا نیستند.



اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

درباره‌ی عددهای حقیقی با چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آشنا شدیم و این اعمال را اعمال دوتایی عددهای حقیقی نامیدیم، حال می‌خواهیم عمل‌هایی را درباره مجموعه‌ها بیان کنیم.

اجتماع دو مجموعه: اجتماع دو مجموعه‌ی A و B مجموعه‌ی همه‌ی عضوهایی است که هر عضو A یا متعلق به B یا متعلق به هر دو مجموعه باشد و آن را به صورت $A \cup B$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲۷: اجتماع دو مجموعه‌ی $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

به صورت زیر است:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$$

مثال ۲۸: اجتماع دو مجموعه‌ی

$$A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$$

$$B = \{x | x \in \mathbb{N}, -4 \leq x \leq 3\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

به صورت زیر است:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

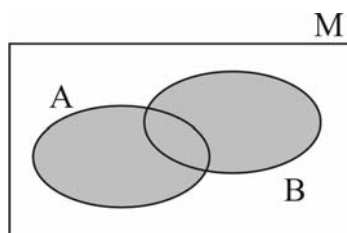
توجه ۹: اگر $A \subset B$ در این صورت $A \cup B = B$

توجه ۱۰: $A \cup \emptyset = A$ ، $A \cup A = A$ و $A \cup M = M$

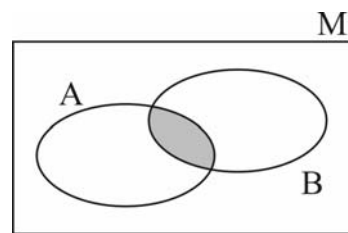
اشتراک دو مجموعه: اشتراک دو مجموعه‌ی A و B مجموعه‌ی همه‌ی عضوهایی است که هم متعلق به A و هم متعلق به B باشد و آن را به صورت $A \cap B$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲۹: اشتراک دو مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 5, 7\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$ را به صورت $A \cap B = \{2\}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۳۰: در شکل‌های زیر $A \cap B$ و $A \cup B$ سایه زده شده‌است.



$A \cup B$



$A \cap B$

مثال ۳۱: اشتراک دو مجموعه‌ی

$$A = \{1, 3, 5, 7\} \quad , \quad B = \{2, 4, 6\} \quad \Rightarrow \quad A \cap B = \{ \} = \emptyset$$

توجه ۱۱: اگر $A \subset B$ در این صورت $A \cap B = A$

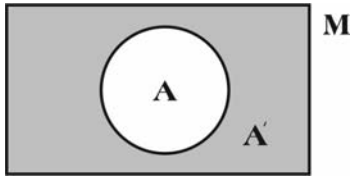
توجه ۱۲: $A \cap M = A$ ، $A \cap A = A$ ، $A \cap \emptyset = \emptyset$

توجه ۱۳: $(A \cap B) \subset A$ ، $B \subset (A \cup B)$ ، $A \subset (A \cup B)$ ،
 $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ ، $(A \cap B) \subset B$

دو مجموعه‌ی جدا از هم: دو مجموعه‌ی A و B را جدا از هم گوئیم اگر هیچ عضوی مشترکی نداشته باشند. یعنی: $A \cap B = \emptyset$.

مثال ۳۲: مجموعه‌ی دانش‌آموزان کلاس اول و مجموعه دانش‌آموزان کلاس دوم دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، زیرا هیچ دانش‌آموزی نیست که در هر دو کلاس درس بخواند.

مثال ۳۳: مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج و مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، زیرا $E \cap O = \emptyset$.



متمم یک مجموعه: اگر A یک مجموعه دلخواه و M مجموعه مرجع مجموعه‌ی A باشد یعنی $A \subset M$ در این صورت همه‌ی عضوهای M که در A نیستند مجموعه‌ای تشکیل می‌دهند که متمم مجموعه‌ی A نامیده می‌شود. متمم مجموعه‌ی A را مجموعه‌ی A' می‌نامیم. [قسمت هاشور خورده A' است.]

$$A' = \{x | x \in M, x \notin A\} = M - A$$

مثال ۳۴: اگر $A = \{۲, ۴, ۶, \dots\}$ و $M = \{۱, ۲, ۳, ۴, \dots\}$ متمم مجموعه‌ی A $A' = \{۱, ۳, ۵, \dots\}$ است. $[A \cap A' = \emptyset]$

مثال ۳۵: اگر $M = \{۲, ۵, ۷, ۹, ۱۱\}$ و $A = \{۷, ۹\}$ در این صورت $A' = \{۲, ۵, ۱۱\}$ است.

توجه ۱۴: اگر $A \subset M$ در این صورت $A' \subset M$ ، $A \cap A' = \emptyset$ ، $A' \cap M = A'$ ، $\emptyset' = M$ ، $M' = \emptyset$

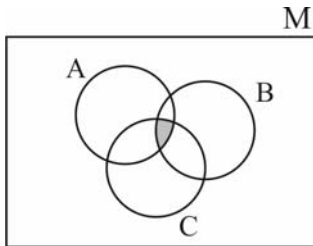
تفاضل دو مجموعه: تفاضل دو مجموعه‌ی A و B را با $A - B$ نمایش می‌دهیم و مجموعه‌ای است که عضوهای آن در A باشد ولی در B نباشد.

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\} = A \cap B'$$

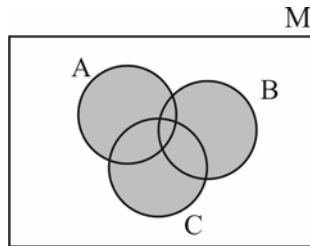
مثال ۳۶: اگر $A = \{۱, ۳, ۵, \dots\}$ و $M = \{۱, ۲, ۳, ۴, \dots\}$ در این صورت $M - A = \{۲, ۴, ۶, \dots\}$.

مثال ۳۷: $A = \{۱, ۴, ۹, ۱۱\}$ و $B = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰\}$ در این صورت $B - A = \{۲, ۶, ۸, ۱۰\}$ و $A - B = \{۱, ۹, ۱۱\}$.

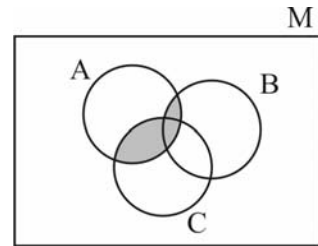
مثال ۳۸: نمودار ون $A \cap (B \cap C)$ ، $A \cup (B \cap C)$ و $A \cap (B \cup C)$ را رسم می‌کنیم.



$A \cap (B \cup C)$



$A \cup (B \cap C)$



$A \cap (B \cap C)$



مجموعه‌ها و احتمال

در زندگی روزمره وقوع یک رویداد را به صورت احتمالی پیش‌بینی می‌کنیم و علاقمندیم درجه‌ی اطمینان به وقوع آن رویداد را معین کنیم. برای تعریف و محاسبه‌ی دقیق احتمال به موارد زیر توجه کنید:

۱- پدیده‌ی قطعی: اگر از کیسه‌ای که دارای ۱۰ مهره‌ی سبز است، یکی را خارج کنیم، قطعاً آن مهره سبز خواهد بود این پدیده که تکرار آن را به نتیجه‌ی یکسانی ختم می‌شود پدیده‌ی قطعی نام دارد.

۲- پدیده‌ی تصادفی: اگر سکه‌ای را پرتاب کنیم، وقتی بر زمین بنشیند یکی از دو حالت رو (H) یا پشت (T) را مشاهده خواهیم کرد. در این پدیده که نمی‌توان وقوع حالتی را از قبل پیش‌بینی کرد پدیده‌ی تصادفی نام دارد.

احتمال: هرگاه در پدیده‌های تصادفی، قاعده و قانونی برای وقوع یک رویداد بیان کنیم که درصد یا شانس وقوع آن را تعیین کند، در واقع احتمال وقوع آن رویداد را محاسبه کرده‌ایم.

مثال ۳۹: احتمال آنکه نوزادی پسر یا دختر باشد $\frac{1}{2}$ است.

مثال ۴۰: با پرتاب یک تاس احتمال آنکه عدد ۳ رو بنشیند $\frac{1}{6}$ است.

$$\text{احتمال وقوع رویداد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد حالت‌های ممکن}}$$

اگر احتمال را با P، حالت‌های ممکن را با S (همه‌ی حالت‌ها) و حالت‌های مطلوب را با A نشان دهیم داریم:

$$\left. \begin{array}{l} n(A) \quad \text{تعداد حالت‌های مطلوب} \\ n(S) \quad \text{تعداد حالت‌های ممکن} \\ P(A) \quad \text{احتمال وقوع رویداد} \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال ۴۱: تاسی را پرتاب می‌کنیم، احتمال آنکه عدد روی آن زوج باشه چقدر است؟

$$\begin{aligned} \text{حالت‌های ممکن} &= S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(S) = 6 \\ \text{حالت‌های مطلوب} &= A = \{2, 4, 6\} \Rightarrow n(A) = 3 \end{aligned} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

توجه ۱۵: عدد احتمال همواره برابر با بین عدد صفر و عدد ۱ است. بیشترین احتمال که یقین داریم واقع می‌شود عدد ۱ و کمترین احتمال احتمال که حتماً واقع نمی‌شود صفر است.

مثال ۴۲: احتمال آن که ماه اردیبهشت بعد از ماه فروردین باشد یک است و احتمال آنکه ماه اردیبهشت قبل از ماه فروردین باشد صفر است.

توجه ۱۶: مجموع همه‌ی احتمالات یک رویداد مساوی ۱ است.

حالت‌های هم‌شانسی: در صورتی که وقوع دو یا چند رویداد مساوی باشد، آن رویدادها، هم‌شانسی هستند. مانند شانس پسر یا دختر شدن یک نوزاد که برای هر کدام احتمال وقوع $\frac{1}{2}$ است.

مثال ۴۳: همه‌ی احتمالات پرتای یک تاس را بدست آورد و جمع احتمالات را محاسبه می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} \text{احتمال وقوع عدد ۱} = p(A_1) = \frac{1}{6} \\ \text{احتمال وقوع عدد ۲} = p(A_2) = \frac{1}{6} \\ \text{احتمال وقوع عدد ۳} = p(A_3) = \frac{1}{6} \\ \text{احتمال وقوع عدد ۴} = p(A_4) = \frac{1}{6} \\ \text{احتمال وقوع عدد ۵} = p(A_5) = \frac{1}{6} \\ \text{احتمال وقوع عدد ۶} = p(A_6) = \frac{1}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + p(A_4) + p(A_5) + p(A_6) \\ = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

توجه ۱۷: مجموع احتمال وقوع یک رویداد و عدم وقوع آن رویداد، همواره برابر عدد یک است

$$P(A) + P(A') = 1 \text{ (به این نوع پیشامدها مکمل می‌گوییم.)}$$

مثال ۴۴: احتمال وقوع عدد زوج با پرتاب تاس روی زمین و احتمال عدم وقوع عدد زوج را به دست می‌آوریم:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{2, 4, 6\}, A' = \{1, 3, 5\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow P(A) + P(A') = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

توجه ۱۸: تعداد حالت‌های مورد انتظار در n بار انجام یک کار از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$n \text{ بار} \times \text{احتمال وقوع آن رویداد} = \text{تعداد وقوع مورد انتظار در } n \text{ بار}$$

مثال ۴۵: اگر سکه‌ای را ۲۰ بار پرتاب کنیم، انتظار داریم چند بار پشت بیاید با پرتاب سکه تعداد حالت‌های ممکن ۲ خواهد بود

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2} \text{ تعداد آمدن پشت} = \frac{1}{2} \times 20 = \frac{20}{2} = 10$$

مثال ۴۶: در کیسه‌ای ۳ مهره قرمز، ۴ مهره سفید و ۵ مهره سبز وجود دارد. از این کیسه مهره‌ای انتخاب می‌کنیم احتمال هر یک

از پیشامدهای الف) مهره انتخابی سفید یا قرمز باشد. ب) مهره انتخابی سفید نباشد.

$$n(S) = 3 + 4 + 5 = 12$$

$$\text{الف) } n(A) = 4 + 3 = 7 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{12}$$

$$\text{ب) } n(B) = 5 + 3 = 8 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

اگر مهره سفید نباشد به این معنی است که قرمز یا سبز است.